

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória aula 7

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO


(cmourao@iseg.utl.pt)

TSP –exercícios

Correção dos exercícios da aula passada

- ✓ Exemplo 1 – slide 55
- ✓ Exercício caso NO
- ✓ Exercício CO

SOLVER



TSP

Cap. 2 – Problemas de Otimização Combinatória - Roteamento

Problemas de roteamento nos nodos

Problemas de roteamento nos arcos


Utilização de Software – VRP **Spreadsheet Solver**

➤ VRP

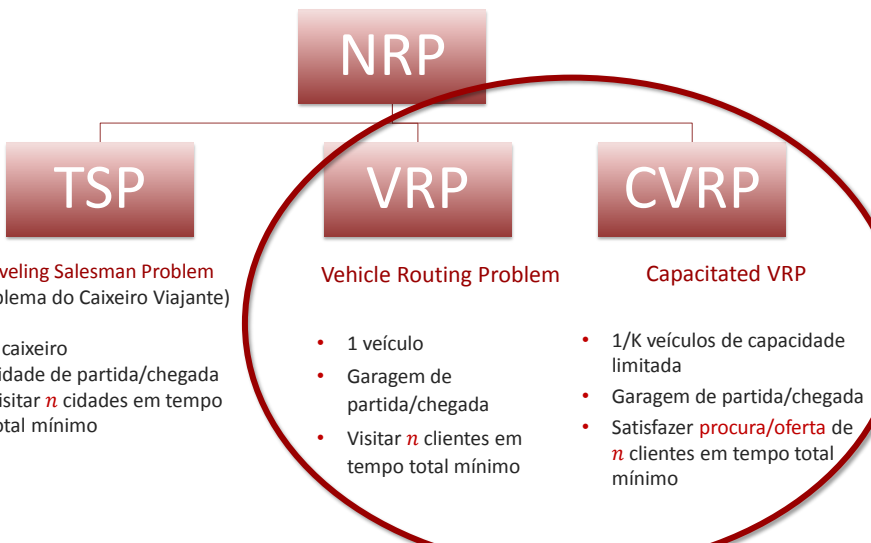
- Modelos – Casos Orientado e não Orientado
- Relaxações
- Heurística
- Solver/Excel

P. Toth & D. Vigo (2014)
Vehicle Routing Problems, Methods, and Application
 2nd ed., MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2017/18
61



Node Routing Problems (NRP)



```

graph TD
    NRP[NRP] --- TSP[TSP]
    NRP --- VRP[VRP]
    NRP --- CVRP[CVRP]
  
```

	Vehicle Routing Problem	Capacitated VRP
<p>TSP</p> <p>Traveling Salesman Problem (Problema do Caixeiro Viajante)</p> <ul style="list-style-type: none"> • 1 caixeiro • Cidade de partida/chegada • Visitar n cidades em tempo total mínimo 	<ul style="list-style-type: none"> • 1 veículo • Garagem de partida/chegada • Visitar n clientes em tempo total mínimo 	<ul style="list-style-type: none"> • 1/K veículos de capacidade limitada • Garagem de partida/chegada • Satisfazer procura/oferta de n clientes em tempo total mínimo

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2017/18
62

VRP – Componentes Básicas



- Características da frota de veículos
- Condições de transporte
- Requisitos dos clientes – como podem ser satisfeitos
- Conceito de rota admissível
- Especificidades das rotas
- Dados a considerar – que custos e/ou proveitos; tempos; ofertas/procuras
- Horizonte de planeamento
- Sistemas dinâmicos – comunicação constante condutor/planeamento

VRP – Curiosidades



- **1959** – Dantzig & Ramser – *The Truck Dispatching Problem*
Management Science, Vol. 6, pp. 80-91
 - Distribuição de gasolina
 - 1º modelo matemático
 - 1ª Heurística
- **1964** – Clarke & Wright – *Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points*
Operations Research, Vol. 12, pp. 568-581
 - Savings Heuristic – greedy
- **Grupos de Investigadores**
 - USA – Transportation Science and Logistics society
 - Europa – VeRoLog – Vehicle Routing and Logistics Optimization (www.verolog.eu)



VRP – características

Capacitated VRP



Gilbert Laporte
HEC Montréal

- Veículos de capacidade limitada
- Garagem de partida/chegada – depósito
- Satisfazer procura/oferta de n clientes em tempo (custo; distância; ...) total mínimo
- Decidindo:
 - que veículo deve satisfazer que clientes
 - &
 - qual a sequência de clientes a visitar por cada veículo
- VRP - Componentes básicas Identificar – requisitos da procura

Em geral, NP-difíceis!

Capacitated VRP (CVRP) – Notação

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – Clientes
- $V = N \cup \{0\}$; 0 – depósito
- Grafo:
 - $G = (V, E)$ – Não Orientado ($\{i, j\} \in E$) (grafo completo: $|E| = \frac{n(n+1)}{2}$)
 - ou
 - $G = (V, A)$ – Orientado ($(i, j) \in A$) (grafo completo: $|A| = n(n+1)$)
- $K = \{1, \dots, |K|\}$ ($|K| \geq 1$) veículos homogêneos de capacidade limitada
- $Q > 0$ – capacidade de cada veículo
- c_{ij} – custo (distância; tempo; ...) da ligação (i, j)
- q_i – procura/oferta do cliente $i \in N$
- $\delta^+(i)$ – nº de arcos a sair de $i \in V$; $\delta^-(i)$ – nº de arcos a entrar em $i \in V$
- $\delta^+(S)$ – nº de arcos a sair de $S \subset V$; $\delta^-(S)$ – nº de arcos a entrar em $S \subset V$
- $\delta(i)$ – nº de arestas incidentes em $i \in V$; $\delta(S)$ – nº de arestas incidentes em $S \subset V$

Capacitated VRP (CVRP) – Notação



- *Rota* – sequência de vértices, com início e fim no depósito, $r = (0, i_1, i_2, \dots, i_s, 0)$ que visita um subconjunto de clientes, $S = \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subseteq N$
- A *rota* r é *admissível*:
 - se a procura dos clientes visitados não excede a capacidade do veículo, ou seja, se $q(S) = \sum_{i \in S} q_i \leq Q$
 - e se
 - nenhum cliente é visitado mais de uma vez
- SA para o CVRP - $|K|$ rotas admissíveis, uma para cada veículo $k \in K$
- As rotas $r_1, r_2, \dots, r_{|K|}$ e os correspondentes conjuntos de clientes $S_1, S_2, \dots, S_{|K|}$ representam uma SA para o CVRP se todas as rotas forem admissíveis e se $S_1, S_2, \dots, S_{|K|}$ representarem uma partição de N

CVRP – Resolução



- Tarefas interligadas para identificar uma SA para o VRP:
 - Identificar uma partição do conjunto de clientes N em $|K|$ subconjuntos
 - Identificar uma rota admissível que sirva cada um dos subconjuntos de clientes - TSP
- Se resolvidas em separado não podemos garantir a otimalidade da solução!

CVRP – Modelos - CO



- Dados: $G = (V, A)$; c_{ij} ; q_i ; K ; Q ;
- Variáveis: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se 1 veículo viaja de } i \in V \text{ para } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
- Modelo:

G. Laporte, H. Mercure, Y. Nobert,
1986
*An exact algorithm for the
asymmetrical capacitated VRP*
Networks, Vol. 16, pp. 33-46

$|A| = n(n + 1)$ variáveis!

$$\begin{aligned}
 \text{(VRP1)} \quad & \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} && \text{Minimização do custo total} \\
 \text{s. a:} \quad & \begin{cases} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = 1 & \forall i \in N && \text{Sai 1 vez de cada cliente } i \\ \sum_{k \in \delta^-(i)} x_{ki} = 1 & \forall i \in N && \text{Chega 1 vez a cada cliente } i \\ \sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0j} = |K| & && \text{São usados os } |K| \text{ veículos} \\ \sum_{j \in \delta^+(s)} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{q(s)}{Q} \right\rceil & \forall s \subseteq N, s \neq \emptyset && \text{Restrições de eliminação de} \\ & && \text{subcircuitos ilegais \& capacidade} \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A && \end{cases}
 \end{aligned}$$

VRP – Modelos – CO – exemplo 4



Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de roteamento nos nodos

	Dep	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Dep	-	20	55	50	40	15	30	40
C1	25	-	40	20	50	25	15	50
C2	60	35	-	50	20	30	40	10
C3	35	30	45	-	20	50	60	35
C4	25	40	35	30	-	50	60	20
C5	30	35	10	60	35	-	80	20
C6	45	20	35	50	70	45	-	25
C7	60	35	25	40	30	60	50	-

Em que dispõe de veículos com 80 de capacidade e as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Procuras	45	50	30	20	25	35	30

- a) Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos ilegais.
- b) Introduza restrições na resolução de a) para tentar melhorar o valor do minorante, caso possível.

CVRP – Modelos - CNO



➤ Dados: $G = (V, E)$; c_{ij} ; q_i ; K ; Q ;

➤ Variáveis: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se 1 veículo viaja entre } i \in V \text{ e } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$

$$|E| = \frac{n(n+1)}{2} \text{ variáveis!}$$

➤ Modelo:

$$(VRP2) \min \sum_{\{i,j\} \in E} c_{ij} x_{ij} \quad \text{Minimização do custo total}$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} \sum_{j \in \delta(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in N & \text{2 arestas incidentes em cada cliente } i \\ \sum_{j \in \delta(0)} x_{0j} = 2|K| & \text{Os } |K| \text{ veículos partem e chegam ao depósito} \\ \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset & \text{Restrições de eliminação de subcircuitos} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall \{i,j\} \in E & \text{ilegais \& capacidade} \end{cases}$$

G. Laporte, Y. Nobert, M. Desrochers 1985
Optimal routing under capacity and distance restrictions
Op. Res., Vol. 33, pp. 1050-1073

VRP – Modelos – CNO – exemplo 5



Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de roteamento nos nodos

	Dep	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Dep	-	20	55	50	40	15	30	40
C1		-	40	20	50	25	15	50
C2			-	50	20	30	40	10
C3				-	20	50	60	35
C4					-	50	60	20
C5						-	80	20
C6							-	25
C7								-

Em que dispõe de veículos com 80 de capacidade e as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Procuras	45	50	30	20	25	35	30

- Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos ilegais.
- Introduza restrições na resolução de a) para tentar melhorar o valor do minorante, caso possível.

CVRP – Modelos



- Técnicas para lidar com as restrições de quebra de subcircuitos em n^o exponencial:
 - Relaxações – eliminando todas ou parte destas restrições, que podem depois ir sendo inseridas – Branch-and-Cut!
 - Recorrendo a novas variáveis & restrições – caso orientado – *MTZ-model*

D.L. Miller, A.W. Tucker, R.A. Zemlin, 1960
Integer programming formulations for the TSP
 Journal of the ACM, Vol. 7, pp. 326-329

CVRP – Modelos - CO



- Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais & capacidade:

$$\sum_{j \in \delta^+(S)} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

D.L. Miller, A.W. Tucker, R.A. Zemlin,
 1960

- Novas Variáveis: u_i – procura já satisfeita quando o veículo chega a $i \in N$
 - Quebra de Subcircuitos ilegais: $u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - q_j \quad \forall (i, j) \in A(N)$
 - Capacidade: $q_i \leq u_i \leq Q \quad \forall i \in N$

CVRP – Modelos - CO



➤ Modelo: MTZ

$$(VRPMTZ) \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad \text{Minimização do custo total}$$

$$\text{s. a: } \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N & \text{Sai 1 vez de cada cliente } i \\ \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in N & \text{Chega 1 vez a cada cliente } i \\ \sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0j} = |K| & \text{São usados os } |K| \text{ veículos} \\ u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - q_j \quad \forall (i,j) \in A(N) & \text{Eliminação de subcircuitos ilegais} \\ q_i \leq u_i \leq Q \quad \forall i \in N & \text{Capacidade} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A & \end{array} \right.$$

$n(n+2)$ variáveis

$n(n+5) + 1$ restrições

VRP – Modelos – CO – exemplo 4



Considere de novo o exemplo 4:

- Formule o problema utilizando as restrições *MTZ* para eliminação dos subcircuitos ilegais
- Compare os valores dos problemas resolvidos anteriormente com o de a)

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória VRP – aula 8

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.utl.pt)

CVRP – Modelos - CO

Problema do modelos anteriores:

- Pode ser difícil identificar o serviço de cada veículo!
- Modelos com **variáveis de 3 índices!**



Bruce L. Golden
Univ. Maryland




Tom L. Magnanti
MIT

B.L. Golden, T.L. Magnanti, H.Q. Nguyen, 1977

Implementing VR algorithms

Networks, Vol. 7, pp. 113-148



CVRP – Modelos - CO

B.L. Golden, T.L. Magnanti, H.Q. Nguyen, 1977


Modelos de 3 índices

➤ Variáveis:

- $x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ viaja de } i \in V \text{ para } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
- $y_i^k = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ visita } i \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
- u_i^k - (minorante da) procura servida pelo veículo k até chegar a $i \in N$

$|K|[n(n+3)+1]$ variáveis

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2017/18
79



CVRP – Modelos - CO

3 índices com restrições MTZ

(VRP3) $\min \sum_{k=1}^{|K|} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k$ Minimização do custo total

s. a.:

	$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^k = 0 \quad \forall i \in N; \forall k \in K$	cada k , entra e sai de $i = n^o$ de vezes
	$\sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0j}^k = 1 \quad \forall k \in K$	cada k , sai 1 vez do depósito
	$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k = y_i^k \quad \forall i \in N; \forall k \in K$	cada k , se sai de i visita i
	$\sum_{j \in \delta^-(0)} x_{j0}^k = y_0^k \quad \forall k \in K$	cada k , regressa ao depósito
	$\sum_{k \in K} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in N$	garantir os serviços
	$u_i^k - u_j^k + Qx_{ij}^k \leq Q - q_j \quad \forall (i,j) \in A; \forall k \in K$	eliminação de subcircuitos ilegais
	$q_i \leq u_i^k \leq Q \quad \forall i \in N; \forall k \in K$	capacidade
	$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A; \forall k \in K$	

$|K|[n(n+5)+2] + n$ restrições

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2017/18
80

VRP – Modelos – CO – exemplo 4



Considere de novo o exemplo 4:

Formule o problema utilizando as restrições *MTZ* para eliminação dos subcircuitos ilegais e a formulação de 3 índices, recorrendo a veículos com capacidade 150.

CVRP – Heurísticas Construtivas



- Greedy
- Cluster 1st – Route 2nd
 - Identificar uma partição do conjunto de clientes N em $|K|$ subconjuntos
 - Identificar uma rota admissível que sirva cada um dos subconjuntos de clientes - TSP
- Route 1st – Cluster 2nd
 - Identificar uma rota que inclua todos os clientes sem considerar as restrições de capacidade
 - Dividir a rota identificada em $|K|$ subrotas, uma para cada veículo

VRP – Savings Algorithm – Clarke & Wright



➤ H. de Savings - Greedy:

Clarke, G. & Wright, J.W., 1964
Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points
 Op. Res., Vol. 12, pp. 568-581

Passo 0: Inicialização:

Considerar que cada cliente é servido isolado, ou seja, numa rota que o inclui apenas a ele

Passo 1: Calcular o *savings* de juntar cada par de clientes por: $s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$

Passo 2: Ordenar os *savings* por ordem decrescente numa lista L

Passo 3: Selecionar as rotas associada à junção de maior *savings* (1ª da lista L)

Se a junção das rotas identificadas for possível (Q),

- juntar as rotas respetivas
- Atualizar L ; recalculando os *savings* necessários
- Voltar a 2

c.c., retirar a junção de L

Passo 4: Se ainda há *savings* positivos em L , voltar a 2

c.c. FIM

VRP – Modelos – CNO – exemplo 5



Considere de novo o exemplo 5.

- a) Utilizando a heurística de *savings* identifique uma SA.
- b) Compare os valores dos problemas resolvidos anteriormente com o de a)

VRP – Extensões



- ✓ Time Windows – Clientes e Depósito
- ✓ Frota Heterogénea
- ✓ Periódico
- ✓ Pickup & Delivery – restrições de carregamento
- ✓ Com Backhauls
- ✓ Problemas Estocásticos
- ✓ Green VRP
- ✓ Problemas Dinâmicos: procura dinâmicas; tempos/procuras dependentes do tempo
- ✓ VRP Solver

VRPTW – CO



TIME WINDOWS

- Dados:
 - Cada cliente $i \in N$ deve ser visitado no intervalo de tempo $[a_i, b_i]$
 - Depósito representado pelos nodos 0 e $n + 1$
 - s_i tempo necessário para servir o cliente $i \in N$ ($s_0 = s_{n+1} = 0$)
 - t_{ij} tempo de viagem de $i \in V$ para $j \in V$
- Variáveis:
 - $x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ viaja de } i \in V \text{ para } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
 - T_i^k - instante de início de serviço a $i \in N$ pelo veículo $k \in K$

$|K|n(n + 2)$ restrições

VRPTW – Modelos - CO



(VRPTW) $\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k$ Minimização do custo total

$$\text{s. a: } \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^k = 0 & \forall i \in N; \forall k \in K \quad \text{cada } k, \text{ entra e sai de } i = n^\circ \text{ de vezes} \\ \sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0j}^k = 1 & \forall k \in K \quad \text{cada } k, \text{ sai 1 vez do depósito} \\ \sum_{k \in K} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k = 1 & \forall i \in N \quad \text{cada } i \text{ é visitado por um só } k \\ \sum_{j \in \delta^-(n+1)} x_{jn+1}^k = 1 & \forall k \in K \quad \text{cada } k, \text{ regressa ao depósito} \\ \sum_{i \in N} q_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k \leq Q & \forall k \in K \quad \text{capacidade} \\ T_i^k + s_i + t_{ij} - T_j^k + M_{ij} x_{ij}^k \leq M_{ij} & \forall (i,j) \in A; \forall k \in K \quad \text{TW \& eliminação de subcircuitos} \\ a_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k \leq T_i^k \leq b_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k & \forall i \in N; \forall k \in K \quad \text{TW} \\ x_{ij}^k \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A; \forall k \in K \end{array} \right.$$

$|K|(2n^2 + 3n + 3)$ restrições

VRPTW – CO – exemplo 6



Considere a matriz de tempos seguinte relativa a um problema de roteamento nos nodos

	Dep	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Dep	-	10	8	7	6	4	5	6
C1	8	-	4	2	5	3	2	5
C2	10	4	-	5	2	3	4	1
C3	6	3	4	-	2	5	6	4
C4	5	4	3	3	-	5	6	2
C5	6	3	1	6	4	-	8	2
C6	7	2	5	5	7	5	-	3
C7	8	5	2	4	3	6	5	-

Em que dispõe de veículos com 130 de capacidade e as TW e as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Procuras	45	50	30	20	25	35	30
TW	[2, 15]	[8, 20]	[10, 30]	[2, 15]	[10, 30]	[10, 30]	[15, 40]
Tempos serviço	2	4	2	3	4	2	3

Utilize o Solver para resolver o problema com o modelo apropriado.

VRP – Trabalho

Proponha um enunciado para um problema de VRP, recorrendo a uma instância com 7 clientes e 2 veículos.

- a) Utilize um algoritmo para obter uma SA.
- b) Proponha, recorrendo a uma relaxação, um minorante para o problema.
- c) Introduza um corte na relaxação proposta para tentar melhorar o valor do minorante.
- d) Utilizando o modelo de três índices e as restrições *MTZ*, para impedir subcircuitos ilegais, resolva o problema.
- e) Utilize o *VRP Solver* para obter uma solução e compare-a com as geradas nas alíneas anteriores.